Упорядоченные гильбертовы пространства
Е. А. Алехно (Минск, Беларусь)

Пусть A — C^*-алгебра с конусом A^+. Алгебра A называется *упорядоченной C^*-алгеброй*, если инволюция — положительный оператор, единица $\mathbf{e} \geq 0$ и неравенства $a, b \geq 0$ влекут $ab \geq 0$. *Центр* $A_\mathbf{e}$ алгебры A определяется, как $A_\mathbf{e} = \{x : -\lambda\mathbf{e} \leq x \leq \lambda\mathbf{e}$ для некоторого $\lambda > 0\}$ и является коммутативной $\star$-подалгеброй. Если H — гильбертово пространство с конусом H^+, то алгебра ограниченных операторов $L(H)$ является упорядоченной C^*-алгеброй в том, и только том случае, когда H^+ — *самосопряженный*, т.е., $H^+ = (H^+)^*$, где $(H^+)^*$ — конус сопряженный к H^+. Гильбертово пространство H с самосопряженным конусом H^+ называется *упорядоченным гильбертовым пространством.*

Всякое упорядоченное гильбертово пространство H является действительным. Для произвольного $x \in H$ через Px обозначим проекцию x на H. Тогда $Px \perp P(-x)$. Если, кроме того, H является пространством Рисса, то $x^+ = Px$ и $x^- = P(-x)$ для всех $x \in H$. Это обстоятельство дает право, в общем случае, определить модуль элемента $|x| = Px + P(-x)$ и решеточные операции, положив, например, $x \wedge y = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$. Как может быть показано, для введенных таким образом операций сохраняются многие хорошие свойства, которыми обладают решеточные операции в пространствах Рисса. Тем не менее, не имеет место, например, неравенство треугольника. Отметим также следующие факты: **(a)** Если $x, y \geq 0$, то $x \wedge y = 0$ тогда и только тогда, когда $\langle x, y\rangle = 0$; **(b)** Норма на H является решеточной, т.е., неравенство $|x| \leq |y|$ влечет $\|x\| \leq \|y\|$. С помощью введенных операций доказывается, что норма на центре $(L(H))_I$ является монотонной. Более того, порядок в $(L(H))_I$, индуцированный из упорядоченной C^*-алгебры $L(H)$, совпадает с порядком рассматриваемым в общей теории операторов в гильбертовых пространствах, когда полагают $T \geq 0$, если $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ при всех $x \in H$.

Теорема. Пусть A — упорядоченная C^*-алгебра с нормальным конусом A^+. Тогда центр $A_\mathbf{e}$ замкнут в A, всякий элемент $a \in A_\mathbf{e}$ будет эрмитовым и $A_\mathbf{e}$ является AM-пространством с единицей $\mathbf{e}$. В частности, $(L(H))_I$ — это полное по Дедекинду AM-пространство с единицей I, причем $\|T\| = \inf\{\lambda \geq 0 : |T| \leq \lambda I\}$ для всякого $T \in (L(H))_I$.

Как и следует ожидать, операторы $T \in (L(H))_I$ обладают свойствами схожими со свойствами ортоморфизмов в банаховых решетках. Например, для произвольного $x \in H$ справедливы тождества $|Tx| = |T||x| = |T|x||$ и ядро $N(T)$ и область значений $R(T)$ являются идеалами.

Отметим, что в произвольном гильбертовом пространстве H с $\dim H > 2$ существует самосопряженный конус K, для которого центр $(L(H))_I$ тривиален, т.е., $(L(H))_I = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{R}\}$; в частности, в этом случае, H не является пространством Рисса. В качестве примера такого конуса K можно взять конус $K_z = \{x \in H : \langle x, z\rangle \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|\}$, где $z \in H$ и $\|z\| = 1$.